Teoretické základy vícekriteriálního rozhodování

Ing. Petr Korviny

Obsah

1 Teorie multikriteriální analýzy

Stěžejním problémem při nasazování systému dálkově ovládaných prvků v distribučních trafostanicích městských kabelových sítí je nalezení metodiky výběru vhodných lokalit, kde bude instalace těchto prvků nejaktuálnější a nejvhodnější. Zjednodušeně řečeno, je nutno seřadit soubor stávajících zastaralých DTS, určených k náhradě, podle nutnosti jejich výměny za nové, dálkově ovládané distribuční trafostanice. K tomu lze s výhodou využít některé z četných metod mutlikriteriální analýzy.

Teorie multikriteriálního (vícekriteriálního) rozhodování je založena na matematickém modelování, i když pro zvládnutí základů vícekriteriálních optimalizačních technik je možné vystačit s matematikou velmi jednoduchou. Toto použití matematiky za cenu vynaložení jisté námahy na studium, zajišťuje na druhé straně rigorózní přístup k výkladu problematiky optimálního rozhodování v situacích, které svou složitostí jinak přímo svádějí k řešení metodou diskuze až do úplné únavy. Některé partie, zejména z oblasti vícekriteriálního hodnocení variant, jsou navíc srozumitelné bez jakýchkoliv matematických znalostí a mohou být studovány a pochopeny nezávisle na partiích náročnějších.

1.1 Podstata úloh vícekriteriálního rozhodování

Rozhodnutím rozumíme vybrání jedné varianty ze seznamu v dané situaci potenciálně realizovatelných variant na základě většího množství kritérií.

Vedle seznamu kritérií nepřímo formulujících cíl rozhodovací analýzy je nutné mít k dispozici i seznam (množinu) variant, z nichž rozhodnutí vybíráme. Případy, kdy je k dispozici jednoznačně definovaný seznam potenciálních variant jsou spíše výjimkou než pravidlem. Tento seznam může být zadán explicitně, jako výčet konečného počtu možností, nebo implicitně specifikací podmínek, které musí rozhodovací varianta splňovat, aby mohla být považována za přípustnou. Ani v této etapě rozhodovacího postupu se zpravidla nelze vyhnout subjektivním vlivům případně i zjišťování mínění expertů či zadavatele úlohy.

Je-li k dispozici seznam kritérií i seznam rozhodovacích variant, je nutné podrobněji uvážit, jakou formu by konečné rozhodnutí mělo mít. Trváme-li na tom, že je skutečně nutné vybrat jedinou optimální variantu určenou k realizaci, měli bychom si připustit, že v typických případech chceme z nespolehlivých a nedostatečných informací vytěžit něco, co v nich téměř jistě není obsaženo. Speciálním případem takto formulované úlohy je požadavek, abychom seřadili rozhodovací varianty podle pořadí v souladu s tím, jak se přibližují k představě varianty optimální.

1.2 Klasifikace úloh vícekriteriálního rozhodování

Rozhodovací úlohy, v nichž se důsledky rozhodnutí posuzují podle více kritérií, se nazývají *úlohami vícekriteriálního rozhodování*, někdy se překládá výraz *vícekriteriální* jako *multikriteriální* z anglického *multicriterion*.

Protože do této kategorie spadají úlohy velmi různorodé, není dost dobře možné předložit univerzální teorii a z ní vyplývající rozhodovací algoritmus, vhodný pro všechny typy úloh.

Rozhodování v úlohách vícekriteriální optimalizace spočívá v transformaci informací, které máme k dispozici o rozhodovacích variantách a o cílech sledovaných uživatelem. Jiným důležitým hlediskem pro klasifikaci úloh jsou tedy informace, které jsou součástí zadání úlohy, nebo které lze získat v průběhu jejího řešení. Podle tohoto informačního hlediska rozdělíme úlohy vícekriteriálního rozhodování do čtyř kategorií:

1. *Úlohy s informací umožňující skalarizaci optimalizačního kritéria (s kardinální informací o kritériích).* Mohlo by se zdát, že úlohy z této kategorie do vícekriteriálního rozhodování nepatří, neboť jde vlastně o úlohu jednokriteriální. Pro zařazení je však důležité, že úloha je původně formulována jako vícekriteriální a navíc je zde informace umožňující shrnutí více kritérií do jednoho kritéria skalárního. Teorie vícekriteriálního rozhodování je zde

nutná k tomu, aby uvedená redukce na skalár byla provedena kvalifikovaně tak, aby nedošlo ke ztrátě nebo ke zkreslení původních informací.

2. *Úlohy bez informace umožňující skalarizaci.* Úlohy této kategorie jsou jádrem teorie i praxe vícekriteriálního rozhodování. Základním pojmem se kterým se zde pracuje je pojem *nedominovaného řešení*.

3. *Úlohy s informací získanou v průběhu řešení.* Někdy je obtížné získat potřebné informace předem, neboť uživatel a ani analytik předem nevědí, co všechno je pro řešení vícekriteriální úlohy relevantní. Proto byly vyvinuty postupy, které umožňují získávat informace od uživatele v průběhu řešení úlohy a to zpravidla prostřednictvím dialogu uživatele s počítačovým programem.

4. *Parametrická řešení.* Mnozí uživatelé jsou si závislosti výsledného řešení na ne vždy spolehlivé počáteční informaci dobře vědomi. Dávají proto přednost širšímu náhledu do problematiky před více či méně jednoznačným doporučením k akci.

1.3 Základní pojmy úloh vícekriteriálního rozhodování

V úlohách vícekriteriálního hodnocení variant (ÚVHV) má množina rozhodovacích variant, kterou označme A, konečný počet prvků. Po úvodních úkonech, spočívajících v určení hodnotících kritérií a metody získání kvantitativních údajů o hodnotách těchto kritérií pro jednotlivé rozhodovací varianty, lze ÚVHV charakterizovat tzv. *kriteriální maticí*. V této matici sloupce odpovídají kritériím a řádky hodnoceným variantám. Označíme-li prvky kriteriální matice y_{ij}, kde $i = 1, 2, ..., p$ a $j = 1, 2, ..., k$, můžeme kriteriální matici zapsat ve tvaru:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \dots & f_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} y_{11}, & y_{12}, & \dots, & y_{1k} \\ y_{21}, & y_{22}, & \dots, & y_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{p1}, & y_{p2}, & \dots, & y_{pk} \end{array} \right] \end{array} \tag{1}$$

Pokud není výslovně uvedeno jinak, tak se předpokládá, že všechna kritéria v ÚVHV jsou stanovena jako *maximalizační*. Tím se rozumí, že varianta je tím lepší, čím je hodnota kritéria větší.

Jestliže jsou v původním zadání úlohy některá z kritérií uvedena jako minimalizační, nebývá obtížné tato kritéria přetransformovat tak, aby byla maximalizační.

Definice nedominované varianty: Zjednodušeně lze říci, že nedominovaná varianta je taková, ke které neexistuje lepší v tom smyslu, že by bylo možné některé hodnoty kritérií zlepšit, aniž by se hodnoty jiných kritérií zhoršily. Přesnou definici je nutno vyslovit takto:

Nechť $a_i \approx (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik})$ a $a_j \approx (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jk})$ jsou dvě varianty. Pak varianta a_i *dominuje* variantu a_j, jestliže $a_i \geq a_j$. Varianta a se nazývá *nedominovaná*, jestliže v množině rozhodovacích variant A neexistuje varianta, která ji dominuje. Množina všech nedominovaných variant z množiny A se označuje A_N.

Často používaným pojmem v teorii vícekriteriálního rozhodování je *optimální varianta*. Narozdíl od pojmu nedominovaná varianta není tento pojem spojen s žádnou jednoznačnou a univerzálně použitelnou definicí. Pojmem optimální varianta se označuje varianta relativně jednoznačně doporučená ke konečnému výběru nebo realizaci.

Je-li v množině A jediná nedominovaná varianta, je možné ji beze vší pochybnosti označit za optimální variantu. Typickým případem však je, že nedominovaných variant je více. Často se lze v praxi setkat s případy, že $A_N = A$. Je-li totiž rozhodovací situace jen trochu přehledná a je-li uživatel seznámen s problematikou, podaří se mu dominované varianty předem vyloučit. Je-li v množině A_N více variant a je-li nutné doporučit pouze variantu jedinou, je nutné aplikovat metody, které vyberou z množiny A_N v jistém smyslu reprezentativní variatnu. Varianta, která je vybrána jako reprezentant množiny A_N se nazývá *kompromisní* (někdy také nejlepší kompromisní varianta).

Při konstrukci metody výběru kompromisní varianty je užitečné vědět, jaký může v dané rozhodovací situaci nastat potenciálně nejlepší případ. Hypotetickou nebo reálně existující variantu, která dosahuje ve všech kritériích logicky nejlepší možné hodnoty, nazýváme *ideální variantou*.

Mezi případy, kdy je ideální varianta odvozena z úrovní kritérií, které mohou být reálně všechny současně dosaženy, a kdy je odvozena pouze z dat vystupujících v kriteriální matici, je jistý rozdíl. V prvním případě se mluví o *absolutní ideální variantě* a ve druhém případě o *relativní ideální variantě*. Pro úplnost je vhodné uvést i případ, kdy část nejlepších hodnot kritérií je odvozena z absolutních stupnic a část pouze z dat uvedených v kriteriální matici. Takto zkonstruovaná ideální varianta se nazývá *smíšená*.

Protějškem ideální varianty je varianta (hypotetická nebo skutečná), která má všechny hodnoty kritérií na nejnižším stupni. Takovou variantu můžeme nazvat variantou *bazální*. Obdobně jako v případě ideální varianty lze definovat i bazální variantu absolutní, relativní a smíšenou.

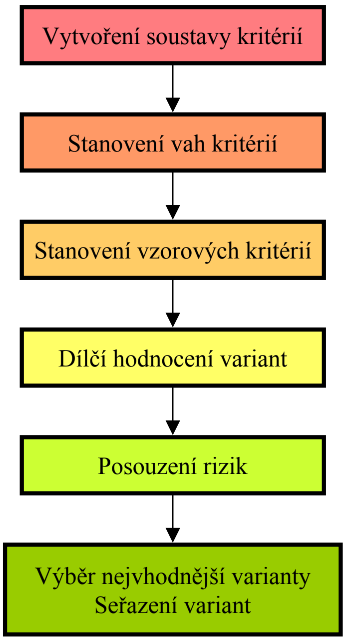
2 Obecný postup multikriteriálního hodnocení variant

Pro standardizaci, vymezení a výběr metod vícekriteriálního hodnocení variant sloužících na podporu rozhodování je nutno znát:

– o čem se má rozhodovat,
– jaké cíle mají být splněny (jakých cílů má být dosaženo a za jakých podmínek),
– z jakých hledisek se má rozhodovat (jaká hlediska má rozhodovací subjekt respektovat),
– k jakému časovému horizontu bude výsledek rozhodování působit.

Obecný postup vícekriteriálního hodnocení variant zahrnuje na zvolené rozlišovací úrovni šest relativně samostatných kroků:

1. vytvoření účelově orientované množiny kritérií hodnocení,
2. stanovení vah kritérií hodnocení,
3. stanovení vzorových hodnot vah kritérií (etalonů),
4. hodnocení dosažených výsledků (důsledků, užitků, ale i případných škod nebo ztrát) variant; jde o dílčí hodnocení variant a jejich syntézu v celkové vyhodnocení,
5. posouzení rizika spojeného s případnou realizací variant,
6. určení preferenčního pořadí variant a výběr nejlepší varianty.



Obrázek 1: Obecný postup vícekriteriálního hodnocení variant

Obecný postup vícekriteriálního hodnocení variant (viz. obr. 1) jako nedílná součást vícekriteriálního rozhodování o variantách předpokládá, že jsou k dispozici alespoň dvě varianty možných řešení z předmětné oblasti.

Není-li splněn tento předpoklad, nejde o multivariantní hodnocení, ale o zvláštní - i když v praxi poměrně často se vyskytující - případ jednovariantního vícekriteriálního hodnocení, jehož cílem není výběr optimální varianty, nýbrž podklad pro vytvoření určitého typu formalizovaného závěru (stanoviska) k předložené variantě. V tomto případě přejímá funkci další varianty tzv. základní (etalonová) varianta, s kterou se posuzovaná varianta srovnává a hodnotí. Její existence je tak pro jednovariantní vícekriteriální hodnocení nutnou podmínkou.

V následujících kapitolách budou podrobněji rozebrány jednotlivé kroky obecného postupu.

2.1 Vytvoření soustavy kritérií hodnocení

Vytváření účelově orientované soustavy kritérií hodnocení je důležitým krokem v celém postupu vícekriteriálního hodnocení variant, kterým lze významně ovlivnit celkové výsledné hodnocení. Racionalita vytváření kritérií hodnocení podstatně závisí na důkladném poznání objektu hodnocení a na systémovém chápání jeho struktury i jeho funkcí. Soubor kritérií musí být úplný, tzn. že musí dobře odrážet podstatné vlastnosti hodnocených objektů (variant). V opačném případě by mohlo dojít k hrubému zkreslení výsledků hodnocení těchto objektů.

Výběr a uspořádání kritérií do výsledné soustavy kritérií hodnocení je sám o sobě složitý a mnohdy obtížně proveditelný proces. Dalším důležitým předpokladem pro vytváření účelově orientovaných soustav kritérií je správná klasifikace kritérií. Kritéria hodnocení lze klasifikovat po stránce věcné a po stránce formální.

Po stránce věcné lze zařadit kritéria do určitých skupin podle tzv. hledisek hodnocení jako jsou například kritéria sociální, ekologická, technická, ekonomická, kulturní, estetická apod. Po stránce formální je třeba rozlišovat u kritérií typ preference a způsob (formu) vyjadřování a měření výsledků hodnocení podle těchto kritérií.

Podle typu preference hodnot kritérií se rozlišují kritéria:

– s rostoucí preferencí (maximalizační, zisková) - u nichž jsou vyšší hodnoty preferovány před nižšími,

– klesající preferencí (minimalizační, ztrátová) - která jsou opakem předchozích,

– se střídavou preferencí - u nichž se preference po dosažení určité hodnoty změní.

Podle způsobu vyjadřování a měření výsledků hodnocení se rozlišují kritéria:

– kvantitativní, jejichž hodnoty lze vyjádřit číselně počtem měrných jednotek,

– kvalitativní, jejichž hodnoty lze vyjádřit pouze verbálně, tj. ve stupních kvality a popisem jejich intenzity.

2.2 Stanovení vah kritérií

Tento krok obecného postupu multikriteriálního hodnocení variant úzce souvisí s úplností soustavy kritérií odrážející podstatné vlastnosti varianty. Avšak i při relativní úplnosti soustavy kritérií je třeba uvažovat při vlastním hodnocení s nestejnou závažností (důležitostí) jednotlivých kritérií, a tudíž i s nestejným významem pro daný účel. Váhy kritérií lze stanovit buď před provedením dílčího hodnocení variant, nebo následně po něm, pro korekci získaných výsledků.

Při užití diferencovaných vah kritérií jsou pak výsledky hodnocení závislé na volbě těchto vah, pro které platí: dostane-li u malého počtu kritérií určité kritérium oproti ostatním kritériím vysokou váhu, pak výsledky hodnocení prokazují tendenci řadit hodnocené varianty podle tohoto kritéria. Při velkém počtu kritérií dochází opět k velkému rozmělňování vah a ačkoliv se váhy jednotlivých kritérií od sebe příliš neodlišují, přesto diferencovat umožňují.

Pro stanovení vah kritérií existuje celá řada rúzných metod; nejjednodušší z nich jsou metody přímé při kterých se zcela subjektivně určují nenormované váhy jednotlivých kritérií v apriorně dohodnuté bodové stupnici. K těmto metodám patří například metoda bodová, Metfesselova alokace, metoda klasifikace kritérií do tříd a další. Do druhé skupiny patří metody nepřímé, z nichž nejčastěji se používá metoda párového srovnání, kde lze zařadit například metodu Fullerova trojúhelníka nebo složitější Saatyho metodu. Některé z těchto metod jsou důkladně popsány v kapitole 4.4.

2.3 Stanovení vzorových hodnot kritérií

Stanovování souboru vzorových hodnot kritérií se zpravidla spojuje s pojmem ”etalon”. Etalon může být chápán dvěma odlišnými způsoby:

– v prvém případě má etalon charakter detailně vypracovaného objektu - vzoru (ve smyslu úplného popisu všech vlastností objektu), s nímž jsou další hodnocené varianty srovnávány, s cílem získat kopii (repliku) tohoto objektu,

– ve druhém případě má etalon opět charakter objektu - vzoru řešení, avšak jeho vlastnosti jsou záměrné redukovány na podstatné vlastnosti řešeného objektu a ty jsou při hodnocení předmětem porovnávání; (hodnocené varianty jsou ovšem ve své výpovědi o vlastnostech řešeného objektu obsažnější). Takto se etalonová varianta většinou pojímá pří aplikaci metod vícekriteriálního hodnocení variant. Úskalí je v tom, že se názory na podstatnost a nepodstatnost vlastností objektu mohou odlišovat. To vede v praxi k extrémním případům nepřiměřeného redukováni sledovaných vlastností (a tím případně i k jednostrannému zaměření jen na vlastnosti určitého druhu) nebo naopak k případům rozsáhlých, nepřehledných, ”přeurčených”, a skutečnou tvorbu syntetických užitných hodnot nezabezpečujících etalonů.

V zásadě je žádoucí, aby se rozhodování odehrávalo v reálném čase; to mluví pro rozumnou míru apriorizace druhů kritérii resp. i vzorových hodnot kritérii, formalizaci postupů hodnocení atd. Na druhé straně však nelze přehlédnout určitá rizika, která toto pojetí přináší. Vážným rizikem je riziko neprogresivnosti tohoto pojetí. Apriorní určování vzorových hodnot kritérií (zejména bez omezení časového horizontu jejich platnosti, případně bez přípustnosti jejich upřesňování) může být zásadní brzdou zejména podstatných inovací, neobvyklých řešení, námětů na výhodné spojení požadované funkce řešeného objektu (varianty) s funkcemi, o nichž se v zadáni předpokládá, že je bude plnit jiný samostatný objekt. Dalším rizikem je možnost ”přeurčení” kriteriální soustavy. Tendencí jednotlivých vědních disciplín totiž je, mít své normativy (o něž se tvůrci kriteriálních soustav zpravidla - a v podstatě oprávněně - opírají) na ”vysoké úrovni”. Jelikož jsou tyto normativy převážně vytvářeny nezávisle na sobě, může v případech, kdy se chybně požaduje současné splněni všech těchto normativů, vzniknout situace ”přeurčenosti”. Tyto normativy mohou sloužit při aplikacích vícekriteriálního hodnocení variant pouze jako vícerozměrná základna pro vícerozměrné měření a srovnávání posuzovaných variant.

2.4 Hodnocení dosažených výsledků variant

2.4.1 Způsob hodnocení variant

Posuzovaná varianta splňuje vždy určitým způsobem a v určité míře předem požadovaně cíle. Jak dalece se podařilo tyto cíle posuzovanou variantou splnit, čili jaký stupeň splnění požadovaných cílů posuzovaná varianta podle jednotlivých kritérií vykazuje, je předmětem hodnocení dosažených výsledků variant, neboli hodnocení důsledků variant.

Existuje více možných způsobů a metod hodnocení dosažených výsledky variant, jejichž užití závisí na zdrojích, druhu, úplnosti a míře podrobnosti dostupných informací, jež jsou různé na jednotlivých úrovních řízení a pro různé účely hodnocení. V praxi se nejčastěji vyskytují případy, kdy je třeba rozhodnout o variantách zásadního významu co nejdříve a co nejlépe, přičemž dostupnost, množství i kvalita disponibilních informací pro rozhodování zpravidla neodpovídá jejich reálné potřebě.

V těchto případech nezbývá než se opřít o způsoby hodnocení, jež nabízejí metody založené na kvalitativních expertních odhadech, jako jsou např. přímá metoda bodovací nebo nepřímé metody párového srovnávání variant. V nejjednodušším případě se vytváří pouze přímé pořadí variant. Velkou pozornost je přitom třeba věnovat především výběru vhodných expertů-odborníků, dále zpracování logicky i obsahově správného scénáře pro postup hodnocení, vlastnímu provedeni expertního hodnocení a jeho následnému zpracování včetně posouzení objektivizace expertních výpovědí.

V případě, kdy jsou k dispozicí potřebné informace v podrobnější struktuře, nebo je lze v přijatelné době vytvořit či jinak získat, muže rozhodovatel užít náročnějších metod pro hodnoceni dosažených výsledků variant, jako jsou např. metoda bazické varianty, která předpokládá existenci už zmíněné základní (vzorové) varianty, nebo metoda vícerozměrného užitku založená na konstrukci tzv. dílčích funkcí užitku.

Vlastní postup při hodnocení výsledků variant zahrnuje dva kroky:

1. dílčí (jednokriteriální) hodnoceni variant
2. syntézu dílčích (jednokriteriálních) hodnocení variant v jejich celkové (vícekriteriální) vyhodnocení.

2.4.2 Dílčí hodnocení variant

K celkovému vícekriteriálnímu hodnocení variant je zapotřebí kromě stanovení vah kritérií rozhodování i dílčí (jednokriteriální) hodnocení variant z hlediska každého kritéria. S tím však je spojeno několik problémů. Vzhledem k tomu, že většina praktických rozhodovacích úloh používá smíšených kriteriálních soustav, v nichž část kritérií je kvantitativních a část kvalitativních, a dále, že kritéria rozhodování jsou zpravidla vyjádřena v různých vyjadřovacích jednotkách, a to vzájemně nesrovnatelných, je nutno hodnoty, kterých nabývají jednotlivá kritéria pro různé varianty nejdříve transformovat tak, aby byly všechny vyjádřeny v téže jednotce (zpravidla bezrozměrné).

Transformace výsledků variant podle jednotlivých kritérií lze realizovat různými způsoby jež jsou adekvátní užitým metodám hodnocení, z nichž jsou opět nejužívanější:

– metoda dílčích funkcí užitku,
– metoda bodovací,
– nepřímé metody párového srovnávání variant rozhodování (Fullerova metoda, Saatyho metoda),
– metoda bazické varianty.

Pro realizaci transformace výsledků variant v jejich bodové ohodnocení se užívá termín ”transformační funkce”. Nejlepší, ale také na informační zabezpečení nejnáročnější, se jeví způsob transformace pomocí spaciálně vytvářených funkcí na základě aplikace metody dílčích funkcí užitku; v souvislosti s tím je třeba připomenout, že v metodě bodovací a v nepřímých metodách párového srovnávání variant není transformační funkce dána explicitně vzorcem, zatímco v metodě dílčích funkcí užitku a v metodě bazické varianty se konstruuje buď vzorec nebo graf transformační funkce, která pak vyjadřuje závislost dílčího hodnocení variant na hodnotách odpovídajícího kritéria.

Při volbě metody hodnocení je nutno rozlišovat

– zda jde o kritéria kvantitativní nebo kvalitativní,
– zda jde o kritéria s rostoucí, klesající nebo střídavou preferencí, speciálně o kritéria s unimodální preferencí (kde vyšší hodnota kritéria je lepší než jeho nižší hodnota až po dosažení určité hodnoty kritéria, po jejímž překročení je obráceně nižší hodnota kritéria lepší než jeho vyšší hodnota),

- zda jde o kritéria, u nichž lze stanovit žádoucí (maximální ideální, vzorovou) a minimální (ještě přijatelnou) hodnotu (obor hodnot kritérií) nebo alespoň jednu z nich.

Na základě této analýzy hodnotící subjekt rozhodne, zda pro ohodnocení dosažených výsledků posuzovaných variant podle dílčích kritérií použije hodnot pouze kladných, nebo jen záporných, anebo kladných i záporných, vyjadřujících určitou kvalitu dosažených výsledků posuzované varianty. Dále rozhodne o způsobu, jak zhodnotí výsledky posuzované varianty podle kritérií s rostoucí preferencí (a analogicky podle kritérií s klesající preferencí). Obvykle platí zásada: čím lepší výsledky, tím vyšší ohodnocení.

V daném souboru kritérií rozhodování se mohou vyskytovat taková kritéria kvantitativní povahy, která mohou mít za určitých podmínek vetující funkci - tzv. vetokritéria, tzn., že mohou vetovat ostatní dílčí hodnocení variant, byť jakkoli příznivá. Vetokritérium plní svou funkci rozdílným způsobem v závislosti na tom, jde-li o vetokritérium s rostoucí preferencí, klesající preferencí nebo střídavou - speciálně unimodální preferencí. Jestliže u hodnocené varianty hodnota vetokritéria

- s rostoucí preferencí nedosáhne stanovenou kritickou mez,
- s klesající preferencí překročí stanovenou kritickou mez,
- s unimodální preferenci neleží v intervalu mezi dvěma stanovenými kritickými mezemi

pak je hodnocená varianta z hlediska tohoto kritéria zásadně nevyhovující a musí být proto vyloučena ze souboru hodnocených variant, bez ohledu na výsledky hodnocení podle ostatních kritérií.

Proto lze dále předpokládat, že buď soubor kritérií hodnocení neobsahuje žádné vetohodnoty, nebo všechny vetované varianty byly ze souboru variant předem eliminovány a do dalšího kola hodnocení postoupily pouze ty, které při hodnocení vyhověly.

2.4.3 Syntéza dílčích hodnocení variant

Stanoveni preferenčního pořadí variant rozhodování spolu s výběrem optimální varianty je založeno na syntéze (shrnutí, agregaci) dílčích, jednokriteriálních hodnocení variant z hlediska jednotlivých kritérií v celkové (syntetické, souhrnné, komplexní) vícekriteriální vyhodnocení variant z hlediska všech kritérií. Zavedením diferencovaných vah kritérií do dílčích hodnocení výsledků posuzované varianty podle jednotlivých kritérií se provede vážení těchto hodnocení vzhledem k nestejné závažnosti kritérií. V zásadě existují dva způsoby provedení syntézy: aditivní a multiplikativní.

Při aditivní syntéze, která je užívanější, se celkové hodnocení posuzované varianty rozhodování stanoví pomocí vah kritérií a dílčích hodnocení variant jako vážený součet dílčích hodnocení variant podle jednotlivých kritérií. Sestupné uspořádání variant rozhodování podle klesajících hodnot jejich celkového hodnocení umožňuje preferenční uspořádání variant od nejlepší - optimální - k nejhorší.

Podmínkou aditivní syntézy dílčích hodnocení variant v jejich celkové vyhodnocení je tzv. preferenční nezávislost kritérií. Soustava kritérií hodnocení je preferenčně nezávislá, jestliže preferenční pořadí variant při měnících se hodnotách kritérií z libovolné podmnožiny soustavy kritérií a pevných hodnotách ostatních kritérii nezávisí na pevně zvolených hodnotách ostatních kritérií.

Vzhledem k tomu, že rozhodovací proces má interaktivní zpětnovazební charakter projevující se existencí cyklů, v nichž může dojít jednak

- k přehodnocení významnosti (vah) některých kritérií a v důsledku toho i ke změně hodnot jejich vah,
- k modifikaci variant a případně i k rozšíření počtu hodnocených variant,

lze při použití aditivního způsobu syntézy snadno respektovat změnu hodnot vah kritérií při nezměněných hodnotách dílčích hodnocení variant a provést tak analýzu citlivosti, tj. zkoumání vlivu změn hodnot vah kritérií na preferenční pořadí variant.

Může také nastat případ, že některá varianta řešení je při syntéze nepříznivě hodnocena z toho důvodu, že při dobrých až vynikajících dílčích hodnoceních podle většiny kritérií vykazuje výrazně špatná dílčí hodnocení podle několika málo kritérií, majících však vysokou váhu. Pak přichází v úvahu možnost modifikace této varianty resp. tvorba nové varianty, která by si pokud možno zachovala všechna příznivá hodnocení a současně podstatně zlepšila ona nepříznivá dílčí hodnocení.

Obdobně může být snadno přezkoumáno i rozpětí oboru žádoucích hodnot těch kritérií, při nichž - jinak příznivě hodnocené varianty - podkročily nebo překročily příslušné meze přípustných hodnot (pokud se samozřejmě nejedná o kritické meze kritérií s vetofunkcí). Detekcí obou výše uvedených případů umožňuje právě dobrá ”průhlednost” aditivní syntézy.

Další výhoda aditivního způsobu syntézy spočívá v možnosti ověření hodnot vah kritérií resp. v jejich korekci na základě mezní (marginální) míry substituce dílčích hodnocení. Předpokladem pro využití této možnosti je schopnost hodnotitele posoudit pro některou variantu vzájemnou kompenzaci jejich dvou dílčích hodnocení následujícím způsobem: má-li se hodnocení dané varianty podle jednoho kritéria zvýšit o určitou část, musí se současně snížit hodnocení této varianty podle jiného kritéria o určitou část, má-li zůstat celkové hodnocení dané varianty nezměněné. Při této kompenzaci platí, že poměr vah obou kritérií je roven obrácenému podílu změn dílčích hodnocení podle těchto kritérií.

Nevýhodou aditivního způsobu syntézy je fakt, že neumožňuje zobrazit synergický efekt vznikající ze současného souhrnného působení několika kritérií. Příznivé (nepříznivé) dílčí hodnocení podle dvou nebo více kritérií znamená ve skutečnosti více (méně) než pouhý vážený součet jejich dílčích hodnocení.

2.5 Posouzení rizik

Rizik spojených s případnou implementací variant je celá řada. Je třeba zdůraznit, že kterékoliv z nich může nabýt při konkrétním hodnocení značného významu a ovlivnit výsledek hodnocení.Týkají se zejména:

– správnosti formulace konkrétního problému,

– relativní úplnosti a výstižnosti vyjádření podstatných vlastností objektu, který je předmětem hodnocení (vlastností, odvozených z příslušných potřeb, a charakterizujících tedy cíle spojované s pořízením, užíváním, existencí atd. objektu),

– způsobu (metod) tvorby resp. identifikace variant řešení,

– způsobu (metod) vícekriteriálního hodnocení variant, který zahrnuje soubor rizik spojených např. se způsobem vytvoření soustavy kritérií, se způsobem stanovení vah kritérií, se způsobem stanovení vzorových hodnot kritérií, se způsobem hodnocení výsledků variant a se způsobem výběru (doporučení) nejvhodnější varianty,

– náhodných okolností, které by mohly nastat a případně ohrozit realizaci vybrané varianty včetně jejich negativních dopadů.

V případech hodnocení variant týmem expertů patří do okruhu těchto rizik ještě riziko vyplývající z kvality provedení expertního posouzení. To závisí na znalostech a zkušenostech (kompetenci) expertů a správnosti jejich odhadů. Přitom je třeba odlišovat, zda expertní odhad provádí jeden expert nebo skupina expertů.

2.6 Výběr nejvhodnější varianty

Varianta, která je nejvhodnější pro řešení daného rozhodovacího problému, vyplyne z předchozích pěti kroků vícekriteriálního hodnocení variant. Nicméně se vlastní akt doporučení nejvhodnější varianty k rozhodnutí o její implementaci zpravidla považuje za relativně samostatný postupový krok.

Pokud zvolená varianta nekoresponduje s výběrem podle formalizovaného postupu vícekriteriálního hodnocení, došlo v posledním kroku k určitému zásahu, který je sice z hlediska subjektu rozhodování oprávněný, nicméně představuje určité porušení pravidel postupu.

Úvahy, vedené případně v rámci posledního kroku (ať jednotlivcem či skupinou expertů, totožnými či odlišnými od jednotlivce nebo týmu, který prováděl hodnocení), nepředstavují totiž nic jiného než dílčí nebo celkovou revizi některého z předchozích kroků (např. přidání dalšího kritéria, posílení váhy některého kritéria apod.).

Na šestý krok obecného postupu vícekriteriálního hodnocení variant by tedy mělo být nahlíženo jako na krok, umožňující případné iterace, a nikoliv jako na ”právo” rozhodovatele vyslovit ”konečný soud” v předmětném rozhodovacím procesu.

2.7 Vzájemná závislost a podmíněnost kritérií

U většího souboru kritérií se jen málokdy podaří zabránit tomu, aby neobsahoval i kritéria vzájemně závislá, podmíněná. K řešení těchto případů se v teorii a praxi vícekriteriálniho hodnocení variant využívá příslušný matematický aparát, který rozlišuje dva základní druhy závislostí mezí veličinami: závislost pevnou (funkční) a závislost volnou (statistickou).

Funkční závislost se v aplikaci na vzájemnou závislost kritérií v určitém souboru interpretuje tak, že hodnotě jednoho kritéria nebo hodnotám několika kritérií odpovídá podle nějakého (matematického) funkčního vztahu jednoznačně hodnota jiného kritéria.

Statistická závislost mezi kritérii může, ale také nemusí, být projevem příčinného vztahu. Proto je nezbytné doplňovat pokaždé formalizovaný přístup, analýzu závislosti kritérií, neformalizovaným přístupem, věcným rozborem vztahů mezi vlastnostmi vybranými do soustavy kritérií. Teprve na jeho podkladě lze prokazovat, zda existují věcné návody pro závěr, že mezi kritérii existuje příčinný vztah.

Jinou z často se vyskytujících příčin statistické závislosti kritérií je obsahové překrývání dvojic kritérií. Tento jev - pokud nastane - musí být respektován zmenšením vah takové dvojice kritérií. Situace je však složitější v případě, že se překrývá obsah více n-tic kritérií. Pak již nelze apriorně odhadnout, která kritéria by měla svou relativní váhu snížit a která zvýšit.

Výsledkem analýzy vzájemné závislosti kritérií může být buď snížení počtu kritérií nebo korekce vah kritérií.

2.8 Expertní hodnocení

Stanoví-li se váhy kritérií hodnocení nebo dílčí hodnocení variant anebo obojí na základě subjektivních výpovědí týmu odborníků, používá se k jejich stanovení uvedených metod, doplněných o postupy, které zahrnujeme pod společný název ”objektivizace expertních výpovědí”.

3 Multikriteriální vyhodnocovací metody

Řada metod vícekriteriálního hodnocení variant vyžaduje kardinální informaci o relativní důležitosti kritérií, kterou lze vyjádřit pomocí vektoru vah kritérií:

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_k); \quad \sum_{i=1}^{k} v_i = 1; \quad v_i \geq 0 \tag{2}$$

Tyto metody je možné rozdělit podle výpočetního principu, který metody využívají, například:

– maximalizace užitku,

– minimalizace vzdálenosti od ideální varianty,

– vyhodnocování variant na základě preferenční relace, atd.

Na základě typu úlohy, která je řešena v rámci této dizertační práce, byly zvoleny následující metody jako nejvhodnější pro určení optimálního pořadí modernizace DTS na DO DTS:

– Metoda váženého součtu (WSA - Weighted Sum Approach)

– Metoda ideálních bodů (IPA - Ideal Points Analysis)

– Metoda TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)

– Metoda shody a neshody (CDA - Concordance Discordance Analysis)

3.1 Metoda váženého součtu - WSA

Metoda váženého součtu vychází z principu maximalizace užitku [5], dopouští se však zjednodušení v tom, že předpokládá pouze lineární funkci užitku.

Nejprve vytvoříme normalizovanou kriteriální matici $R = (r_{ij})$, jejíž prvky získáme z kriteriální matice $Y = (y_{ij})$, viz. (1), pomocí transformačního vzorce (3)

$$r_{ij} = \frac{Y_{ij} - D_j}{H_j - D_j} \tag{3}$$

Tato matice již představuje matici hodnot užitku z i-té varianty podle j-tého kritéria. Podle vzorce (3) lineárně transformujeme kriteriální hodnoty tak, že $r_{ij} \in < 0,1 >$, D_j odpovídá minimální hodnota kritéria ve sloupci j a H_j odpovídá maximální hodnota kritéria ve sloupci j.

Vztah (3) se používá v případě, že kritérium v daném sloupci j je považováno za maximalizační. Pro případ minimalizačního kritéria lze provést normalizaci takového sloupce v matici přímo použitím vztahu (4)

$$r_{ij} = \frac{H_j - Y_{ij}}{H_j - D_j} \tag{4}$$

Pokud chceme mít všechna kritéria v kriteriální matici jako maximalizační ještě před provedením standardizace (normalizace) matice, přepočteme prvky v takovémto soupci podle vztahu (5)

$$Y_{ij-max} = H_{j-min} - Y_{ij-min}; \quad i = 1, 2, \ldots, p \tag{5}$$

tedy od stávajícího největšího prvku (maxima) H_{j-min} v daném sloupci postupně odečteme všechny ostatní prvky a tím převedeme sloupec s minimalizačním kritériem na maximalizační. Tento převod je však v vztahu (4) již zanesen a většina výpočetních programů s touto možností počítá.

Při použití aditivního tvaru vícekriteriální funkce užitku je pak užitek varianty a_i roven

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^{k} v_j \cdot r_{ij} \tag{6}$$

Varianta, která dosáhne maximální hodnoty užitku je vybrána jako nejlepší, případně je možno uspořádat varianty podle klesající hodnoty užitku.

PŘÍKLAD: Předpokládejme situaci, že se uvažuje o výstavbě vodní elektrárny a k dispozici je šest variant a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, které se hodnotí podle šesti kritérií:

kritérium f_1 – počet pracovních sil (min)
kritérium f_2 – výkon v MW (max)
kritérium f_3 – investiční náklady v mld. Kč (min)
kritérium f_4 – provozní náklady v mil. Kč (min)
kritérium f_5 – počet evakuovaných obcí při výstavbě (min)
kritérium f_6 – stupeň spolehlivosti provozu v bodové stupnici (max).

Výchozí kriteriální matice Y:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 90 & 6 & 5,4 & 8 & 5 \\ 65 & 58 & 2 & 9,7 & 1 & 1 \\ 83 & 60 & 4 & 7,2 & 4 & 7 \\ 40 & 80 & 10 & 7,5 & 7 & 10 \\ 52 & 72 & 6 & 2,0 & 3 & 8 \\ 94 & 96 & 7 & 3,6 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \tag{7}$$

Provedeme úpravu kriteriální matice na tvar, kdy všechna kritéria budou maximalizační (max) a pro minimalizační kritéria určíme nejhorší hodnoty: $94 - f_1$, $10 - f_3$, $9,7 - f_4$, $8 - f_5$.

Od těchto hodnot odečteme kriteriální hodnoty dané varianty a převedeme tak, dle vztahu (5), všechna minimalizační kritéria na maximalizační. Získáme matici ve tvaru:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 14 & 90 & 4 & 4,3 & 0 & 5 \\ 29 & 58 & 8 & 0,0 & 7 & 1 \\ 11 & 60 & 6 & 2,5 & 6 & 7 \\ 54 & 80 & 0 & 2,2 & 1 & 10 \\ 42 & 72 & 4 & 7,7 & 5 & 8 \\ 0 & 96 & 3 & 6,1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \tag{8}$$

Dále určíme maximální H a minimální D hodnoty z každého sloupce j:

$$\begin{aligned} H &= (54; 96; 8; 7,7; 7; 10) \\ D &= (0; 58; 0; 0,0; 0; 1) \end{aligned}$$

Následně pomocí transformačního vzorce (3) vytvoříme normalizovanou kriteriální matici (9), jejíž prvky vyjadřují hodnoty užitku dané varianty podle určitého kritéria. Předpokládejme, že jsme získali vektor vah kritérií:

$$v = (0,07; 0,24; 0,33; 0,19; 0,09; 0,08)$$

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,26 & 0,84 & 0,50 & 0,56 & 0,00 & 0,44 \\ 0,54 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,20 & 0,05 & 0,75 & 0,32 & 0,86 & 0,67 \\ 1,00 & 0,58 & 0,00 & 0,29 & 0,14 & 1,00 \\ 0,78 & 0,37 & 0,50 & 1,00 & 0,71 & 0,78 \\ 0,00 & 1,00 & 0,38 & 0,79 & 0,43 & 0,56 \end{bmatrix} \end{array} \tag{9}$$

Maximální hodnoty užitku dosahuje varianta a_5 a je vybrána jako nejlepší. Uspořádáním variant podle hodnot užitku dostáváme pořadí: $u(a_5) = 0,62$; $u(a_6) = 0,60$; $u(a_1) = 0,53$; $u(a_2) = 0,46$; $u(a_3) = 0,44$; $u(a_4) = 0,36$.

3.2 Metoda ideálních bodů - IPA

O této metodě lze nalézt zmínku např. v [1], [2] a jedná se vlastně o metodu WSA s nepatrnou úpravou, kde je vzorec (6) upraven na tvar

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^{k} v_j \cdot (1 - r_{ij}) \tag{10}$$

čímž se dosáhne změny v uspořádání seznamu variant tak, že hodnota s nejnižším užitkem je zde nejlepší a naopak.

3.3 Metoda TOPSIS

V případě metody TOPSIS se jedná o princip minimalizace vzdálenosti od ideální varianty [5]. Ideální variantou nazveme variantu, pro kterou všechny hodnoty kritérií dosahují nejlepších hodnot. Ideální varianta je většinou hypotetická, jako nejlepší se pak vybírá taková, která je podle určité metriky nejblíže k ideální variantě.

Metoda TOPSIS poskytuje úplné uspořádání množiny všech variant, tj. je určena i pro výběr nejlepší varianty. Požadovanými vstupními údaji jsou kriteriální hodnoty pro jednotlivé varianty a váhy jednotlivých kritérií.

Kriteriální hodnoty pro jednotlivé varianty jsou uspořádány v kriteriální matici $Y = (y_{ij})$, kde y_{ij} je hodnota i-té varianty hodnocené podle j-tého kritéria.

Metoda je založena na výběru varianty, která je nejblíže k ideální variantě reprezentované vektorem $(H_1, H_2, \ldots, H_k)$ a nejdále od bazální varianty reprezentované vektorem $(D_1, D_2, \ldots, D_k)$.

Nejprve se konstruuje normalizovaná kriteriální matice $R = (r_{ij})$, kde pro výpočet normalizovaných hodnot je navržen vzorec

$$r_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} (y_{ij})^2}} \tag{11}$$

kde: $i = 1, 2, \ldots, p$
$j = 1, 2, \ldots, k$

Po této transformaci jsou sloupce v matici R vektory jednotkové délky.

Následně vypočteme váženou kriteriální matici W tak, že každý j-tý sloupec normalizované kriteriální matice R násobíme odpovídajcí váhou v_j:

$$W = \begin{bmatrix} w_{11}, & w_{12}, & \ldots, & w_{1k} \\ w_{21}, & w_{22}, & \ldots, & w_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{p1}, & w_{p2}, & \ldots, & w_{pk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \cdot r_{11}, & v_2 \cdot r_{12}, & \ldots, & v_k \cdot r_{1k} \\ v_1 \cdot r_{21}, & v_2 \cdot r_{22}, & \ldots, & v_k \cdot r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 \cdot r_{p1}, & v_2 \cdot r_{p2}, & \ldots, & v_k \cdot r_{pk} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Nyní určíme ideální variantu $H = (H_1, H_2, \ldots, H_k)$ a bazální variantu $D = (D_1, D_2, \ldots, D_k)$ vzhledem k hodnotám ve vážené kriteriální matici,

kde: $H_j = max_i(w_{ij}); \quad i = 1, 2, \ldots, k,$
$D_j = min_i(w_{ij}); \quad j = 1, 2, \ldots, k$

Další krok spočívá ve výpočtu vzdáleností variant od ideální varianty

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(w_{ij} - H_j)^2}; \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{13}$$

a vzdáleností variant od bazální varianty

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}(w_{ij} - D_j)^2}; \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{14}$$

V obou případech je použita Euklidova míra vzdálenosti.
Výpočet relativního ukazatele vzdáleností variant od bazální varianty:

$$c_i = \frac{d_i^+}{d_i^+ - d_i^-}; \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{15}$$

Pro hodnoty c_i platí:

$$0 \leq c_i \leq 1$$
$$c_i = 0 \Longleftrightarrow a_i \approx (D_1, D_2, \ldots, D_k) \tag{16}$$
$$c_i = 1 \Longleftrightarrow a_i \approx (H_1, H_2, \ldots, H_k) \tag{17}$$

Varianty se seřadí podle klesajících hodnot ukazatele c_i, čímž získáme úplné uspořádání všech variant.

PŘÍKLAD: Zde navážeme na příklad na metodu váženého součtu, kde budeme vycházet z již upravené kriteriální matice (8).

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
14 & 90 & 4 & 4,3 & 0 & 5 \\
29 & 58 & 8 & 0,0 & 7 & 1 \\
11 & 60 & 6 & 2,5 & 6 & 7 \\
54 & 80 & 0 & 2,2 & 1 & 10 \\
42 & 72 & 4 & 7,7 & 5 & 8 \\
0 & 96 & 3 & 6,1 & 3 & 6
\end{array}\right] \end{array}$$

Aby byly údaje srovnatelné, transformujeme je dle vztahu (11) pro prvky normalizované matice R:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
0,183 & 0,475 & 0,337 & 0,383 & 0,000 & 0,302 \\
0,380 & 0,306 & 0,674 & 0,000 & 0,639 & 0,060 \\
0,144 & 0,317 & 0,505 & 0,223 & 0,547 & 0,422 \\
0,707 & 0,422 & 0,000 & 0,196 & 0,091 & 0,603 \\
0,550 & 0,380 & 0,337 & 0,686 & 0,456 & 0,482 \\
0,000 & 0,507 & 0,253 & 0,543 & 0,274 & 0,362
\end{array}\right] \end{array} \tag{18}$$

Ze stejného příkladu použijeme i vektor vah kritérií $v = (0,07; 0,24; 0,33; 0,19; 0,09; 0,08)$ a podle vzorce (12) vypočteme váženou kriteriální matici W:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,013 & 0,114 & 0,111 & 0,073 & 0,000 & 0,024 \\ 0,027 & 0,074 & 0,222 & 0,000 & 0,057 & 0,005 \\ 0,010 & 0,076 & 0,167 & 0,042 & 0,049 & 0,034 \\ 0,049 & 0,101 & 0,000 & 0,037 & 0,008 & 0,048 \\ 0,038 & 0,091 & 0,111 & 0,130 & 0,041 & 0,039 \\ 0,000 & 0,122 & 0,083 & 0,103 & 0,024 & 0,029 \end{bmatrix} \end{array} \tag{19}$$

Určíme ve vážené kriteriální matici ideální (H) a bazální variantu (D):

$$\begin{aligned} H &= (0,049; 0,122; 0,222; 0,130; 0,063; 0,048) \\ D &= (0,000; 0,074; 0,000; 0,000; 0,000; 0,005) \end{aligned}$$

Vypočteme vzdálenosti jednotlivých variant od ideální varianty d_i^+, kde $i = (1, 2, \ldots, 6)$ a od bazální varianty d_i^-, při $i = (1, 2, \ldots, 6)$:

Varianta	d_i^+	d_i^-
a_1	0,147	0,141
a_2	0,147	0,233
a_3	0,124	0,178
a_4	0,248	0,081
a_5	0,118	0,185
a_6	0,155	0,146

Vypočteme relativní ukazatele vzdálenosti c_i, při $i = (1, 2, \ldots, 6)$.

Varianta	c_i
a_1	0,4892
a_2	0,6122
a_3	0,5898
a_4	0,2466
a_5	0,6117
a_6	0,4839

Podle klesajících hodnot ukazatele c_i uspořádáme varianty a získáme pořadí a_2, a_5, a_3, a_1, a_6, a_4. To znamená, že jako nejlepší varianta vychází varianta a_2 a nejhorší je varianta a_4.

3.4 Metoda shody a neshody - CDA

Analýza shody a neshody je metoda v MCA široce používaná [2], která je založena na porovnávání alternativ výběru po dvojicích. Měří stupeň, kterým alternativy výběru a váhy faktorů potvrzují nebo vyvracejí vyřazovací vzájemný poměr mezi alternativami. Rozdíly ve váhách faktorů a hodnocení kritérií jsou pomocí postupů shody a neshody analyzovány odděleně.

Index shody alternativy a_1 s alternativou a_2 je definován jako podíl součtu vah těch kritérií, pro která je hodnocení a_1 větší nebo rovno hodnocení a_2, a součtu vah všech kritérií. Pro index shody tedy platí:

$$C_{a_1 a_2} = \frac{\sum W_j (e_{a_1 j} \geq e_{a_2 j})}{\sum W_j} \tag{20}$$

Index neshody alternativy a_1 s alternativou a_2 je definován jako podíl, kde čitatel je roven maximálnímu rozdílu vážených hodnocení, pro která je hodnocení a_1 menší než hodnocení a_2, a jmenovatel je roven maximálnímu rozdílu vážených hodnocení všech alternativ pro kritérium vykazující maximální hodnotu výše definovaného čitatele. Index neshody můžeme tedy zapsat:

$$D_{a_1a_2} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{max(W_j \cdot e_{a_2j} - W_j \cdot e_{a_1j})(e_{a_1j} < e_{a_2j})}{max(W_m \cdot e_{im}) - min(W_m \cdot e_{im})} \tag{21}$$

kde: $m = j$ při $D_1 = max$

Celkový index shody alternativy a_1 získáme jako součet všech indexů shody alternativy a_1 vzhledem ke všem ostatním:

$$C_{a_1} = \sum_{j=1}^{J} C_{a_1j} \tag{22}$$

Celkový index neshody alternativy a_1 získáme jako součet všech indexů neshody alternativy a_1 vzhledem ke všem ostatním:

$$D_{a_1} = \sum_{j=1}^{J} D_{a_1j} \tag{23}$$

Posledním krokem je pak seřazení jednotlivých alternativ podle maximálního (resp. minimálního) indexu shody a minimálního (resp. maximálního) indexu neshody. Výsledné hodnocení dané alternativy získáme následovně:

$$CDA_i = I - C_i + D_i \tag{24}$$

Alternativy nakonec seřadíme podle rostoucí (resp. klesající) hodnoty CDA.

PŘÍKLAD: Vstupní kriteriální matice je stejná jako matice (7)

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 90 & 6 & 5,4 & 8 & 5 \\ 65 & 58 & 2 & 9,7 & 1 & 1 \\ 83 & 60 & 4 & 7,2 & 4 & 7 \\ 40 & 80 & 10 & 7,5 & 7 & 10 \\ 52 & 72 & 6 & 2,0 & 3 & 8 \\ 94 & 96 & 7 & 3,6 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \tag{25}$$

Převedeme všechna kritéria zadaná jako minimalizační na maximalizační:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 14 & 90 & 4 & 4,3 & 0 & 5 \\ 29 & 58 & 8 & 0,0 & 7 & 1 \\ 11 & 60 & 6 & 2,5 & 6 & 7 \\ 54 & 80 & 0 & 2,2 & 1 & 10 \\ 42 & 72 & 4 & 7,7 & 5 & 8 \\ 0 & 96 & 3 & 6,1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \tag{26}$$

Nalezneme minimum a maximum z každého sloupce pro všechna kritéria, tedy bazální a ideální variantu a mějme zadán vektor vah kritérií:

Vlastnost	**Kritérium**					
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_5
minimum	54	96	8	7,7	7	10
maximum	0	58	0	0	0	1
váha kritéria	0,07	0,24	0,33	0,19	0,09	0,08

Provedeme normalizaci matice na základě vztahu (3) a získáme

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,26 & 0,84 & 0,50 & 0,56 & 0,00 & 0,44 \\ 0,54 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,20 & 0,05 & 0,75 & 0,32 & 0,86 & 0,67 \\ 1,00 & 0,58 & 0,00 & 0,29 & 0,14 & 1,00 \\ 0,78 & 0,37 & 0,50 & 1,00 & 0,71 & 0,78 \\ 0,00 & 1,00 & 0,38 & 0,79 & 0,43 & 0,56 \end{bmatrix} \end{array} \tag{27}$$

Zavedeme váhy matice dle vztahu (6), tedy každý prvek v daném sloupci vynásobíme váhou příslušnou k danému kritériu:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,018 & 0,202 & 0,165 & 0,106 & 0,000 & 0,036 \\ 0,038 & 0,000 & 0,330 & 0,000 & 0,090 & 0,000 \\ 0,014 & 0,013 & 0,248 & 0,062 & 0,051 & 0,053 \\ 0,070 & 0,139 & 0,000 & 0,054 & 0,013 & 0,080 \\ 0,054 & 0,088 & 0,165 & 0,190 & 0,064 & 0,062 \\ 0,000 & 0,240 & 0,124 & 0,151 & 0,039 & 0,044 \end{bmatrix} \end{array} \tag{28}$$

Index shody C_{AB} vypočteme ze vztahu (20)

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1,00 & 0,51 & 0,50 & 0,76 & 0,57 & 0,40 \\ 0,49 & 1,00 & 0,49 & 0,42 & 0,42 & 0,49 \\ 0,50 & 0,51 & 1,00 & 0,61 & 0,33 & 0,57 \\ 0,24 & 0,58 & 0,39 & 1,00 & 0,39 & 0,15 \\ 0,76 & 0,58 & 0,67 & 0,61 & 1,00 & 0,76 \\ 0,60 & 0,51 & 0,43 & 0,85 & 0,24 & 1,00 \end{bmatrix} \end{array} \tag{29}$$

Celkový index shody pro jednotlivé varianty určíme ze vzorce (22)

Varaianty	C_i
a_1	3,74
a_2	3,31
a_3	3,52
a_4	2,75
a_5	4,38
a_6	3,63

Index neshody, čitatel D_1 vypočteme ze vztahu (21)

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,000 & 0,165 & 0,083 & 0,052 & 0,084 & 0,044 \\ 0,202 & 0,000 & 0,062 & 0,139 & 0,190 & 0,240 \\ 0,189 & 0,083 & 0,000 & 0,126 & 0,128 & 0,227 \\ 0,165 & 0,330 & 0,248 & 0,000 & 0,165 & 0,124 \\ 0,113 & 0,165 & 0,083 & 0,050 & 0,000 & 0,152 \\ 0,041 & 0,206 & 0,124 & 0,070 & 0,054 & 0,000 \end{bmatrix} \end{array} \tag{30}$$

jmenovatel D_2 určíme ze vztahu (21)

$$D_2 = max(W_m \cdot e_{im}) - min(W_m \cdot e_{im}) = 0,4 - 0 = 0,4 \tag{31}$$

takže matice indexu neshody D bude:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \quad a_1 \quad & \quad a_2 \quad & \quad a_3 \quad & \quad a_4 \quad & \quad a_5 \quad & \quad a_6 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,000 & 0,500 & 0,250 & 0,157 & 0,254 & 0,134 \\ 0,612 & 0,000 & 0,187 & 0,421 & 0,570 & 0,720 \\ 0,574 & 0,250 & 0,000 & 0,383 & 0,389 & 0,689 \\ 0,500 & 1,000 & 0,750 & 0,000 & 0,500 & 0,375 \\ 0,344 & 0,500 & 0,250 & 0,153 & 0,000 & 0,459 \\ 0,125 & 0,625 & 0,375 & 0,21 & 0,165 & 0,000 \end{bmatrix} \end{array} \tag{32}$$

Celkový index neshody pro jednotlivé varianty určíme ze vzorce (23)

Varaianty	D_i
a_1	1,295
a_2	2,523
a_3	2,284
a_4	3,125
a_5	1,707
a_6	1,502

Nakonec provedeme analýzu shody a neshody dle vztahu (24) a varianty seřazené od nejlepší po nejhorší jsou v níže uvedené tabulce:

Varaianty	CDA
a_5	3,327
a_1	3,555
a_6	3,872
a_3	4,765
a_2	5,213
a_4	6,375

4 Modelování preferencí mezi kritérii

Vícekriteriální rozhodování, je modelování rozhodovacích situací, ve kterých máme definovánu množinu variant a soubor kritérií, podle nichž budeme varianty hodnotit. V následujícím budou uvedeny dva postupy, jak modelovat preference mezi kritérii a s tím požadované typy informace od uživatele: ordinální informace o kritériích a kardinální informace o kritériích ve formě vah kritérií.

4.1 Ordinální informace

Ordinální informací o kritériích se rozumí jejich uspořádání od nejvíce důležitého po nejméně důležité. Některé metody s ordinální informací připouštějí i kvaziuspořádání, tj. připouštějí i existenci několika stejně hodnocených kritérií.

4.2 Váhy

Většina metod vícekriteriálního rozhodování vyžaduje informaci o relativní důležitosti jednotlivých kritérií, kterou lze vyjádřit pomocí vektoru vah kritérií:

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_k); \qquad \sum_{i=1}^{k} v_i = 1; \qquad v_i \geq 0 \tag{33}$$

4.3 Praktické způsoby získávání vah kritérií

V praxi existuje několik různých způsobů, jak zvolit vhodná kritéria a určit jejich váhu. Zjednodušeně by bylo možné uvést následující tři způsoby:

1. Návrh kritérií i jejich vah je záležitostí **jediného** odborníka, který pravděpodobně sám také provede výpočet a seřazení variant některou z metod vícekriteriálního rozhodování.

2. Na určování vah kritérií, a případně i na volbě kritérií vůbec, se podílí **skupina** odborníků. Výsledek pak lze získat například tak, že se vybraná skupina odborníků sejde a při **společné diskuzi** vyberou kritéria relevantní pro řešení daného rozhodovacího problému a určí i jejich vzájemnou procentní důležitost.

3. Rovněž je zde množnost vybrané **skupině** odborníků rozeslat **dotazníky** s návrhy kritérií, do nichž tito uvedou svůj názor na důležitost jednotlivých kritérií.

4.3.1 Porovnání metodiky postupů při volbě vah kritérií

Každý z výše uvedených postupů má své přednosti i nedostatky, zde jsou vyjmenovány některé z nich:

1. Kritéria a jejich váhy navrhuje jediný odborník:

   Výhody

   (a) Je zcela pochopitelné, že do řešení tohoto problému nebude nutno zainteresovat tak velké množství osob jako v dalších uvedených případech.

   (b) Sníží se tím i doba potřebná pro získání vah kritérií a jejich vyhodnocení.

Nevýhody

(a) Pokud kritéria vybírá jediný odborník, je nutná jeho vysoká odborná znalost problematiky na níž bude multikriteriální analýza aplikována.

(b) Jeden řešitel bez možností konzultací s dalšími odborníky nemusí zvolit tu správnou množinu kritérií.

(c) Při navrhování vah kritérií může jediný odborník podcenit nebo naopak přecenit důležitost některých kritérií.

(d) Objektivita a vypovídací schopnost vektoru vah navrženého jediným odborníkem není tak vysoká, jako v případě, kdy se na určování vah podílí reprezentativnější vzorek expertů.

(e) V případě nutnosti obhajovat výsledky multikriteriální analýzy, v níž byla kritéria nebo jejich váhy navrženy jediným odborníkem, zvyšuje tato skutečnost napadnutelnost obhajoby ze strany oponentů.

2. Kritéria navrhuje skupina odborníků formou společné diskuze:

Výhody

(a) Větší počet odborných pracovníků zajišťuje vyšší míru objektivity při určování relevantních kritérií i jejich vah.

(b) Pracovník, který provádí samotný výpočet pomocí multikriteriální analýzy, nemusí být nutně odborníkem v problematice jíž se týká řešená vícekriteriální úloha.

(c) Snižuje se pravděpodobnost výběru nevhodných kritérií nebo naopak opomenutí důležitých kritérií v důsledku posuzování na základě zkušeností jediného člověka.

(d) Výsledkem takovéto diskuze většinou bývá jednoznačně určená množina kritérií a jejich procentně vyjádřená důležitost (váhový vektor). Takovéto hodnoty lze bez dalších úprav použít přímo v multikriteriální analýze.

Nevýhody

(a) Zajistit setkání většího množství odborníků na danou problematiku v jeden čas a na jednom místě je úkol v některých případech neřešitelný. Určitou možnost zde představuje například uspořádání videokonference, pokud to technické možnosti dovolují.

(b) Mnoho odborníků znamená mnoho rozdílných názorů a to může být také výsledek vzájemné diskuze, narozdíl od jednoznačně určeného váhového vektoru.

3. Kritéria navrhuje skupina odborníků formou vyplňovaných dotazníků:

Výhody

(a) Stejně jako výhody v bodě 2a.

(b) Stejně jako výhody v bodě 2b.

(c) Obeslání vybrané skupiny dotazníky snižuje časovou náročnost a obtíže spojené například s cestováním odborníků na jedno místo.

(d) Při určování vah kritérií vyplňuje daný uživatel dotazník sám, neovlivněn diskuzí a názory dalších odborníků.

Nevýhody

(a) Je nutné zpracovat vyplněné dotazníky tak, aby výsledkem byl jednoznačný vektor vah kritérií, použitelný v MCA.

4.4 Matematické metody určování vah kritérií

Čím je důležitost kritéria větší, tím je větší i jeho váha. Získat od uživatele přímo hodnoty vah je velmi obtížné, avšak existují metody, které na základě jednodušších subjektivních informací od uživatele konstruují odhady vah.

4.4.1 Metoda pořadí

Tato metoda vyžaduje pouze ordinální informaci, stanovení pořadí kritérií podle důležitosti. Uspořádaným kritériím jsou přiřazena čísla (body) $k, \ldots, 1$. Nejdůležitějšímu kritériu je přiřazeno číslo k (počet kritérií), druhému nejdůležitějšímu $k-1$, až nejméně důležitému kritériu číslo 1. Obecně je i-tému kritériu přiřazeno číslo b_i. Váha i-tého kritéria se pak vypočte dle vzorce

$$v_i = \frac{b_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} b_i}; \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{34}$$

Součet čísel b_i ve jmenovateli je součtem prvních k přirozených čísel

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = \frac{k(k+1)}{2} \tag{35}$$

4.4.2 Bodovací metoda

Bodovací metoda předpokládá, že je uživatel schopen kvantitativně ohodnotit důležitost kritérií. Pro zvolenou bodovací stupnici musí uživatel ohodnotit i-té kritérium hodnotou b_i ležící v dané stupnici (např. $b_i \in < 0, 100 >$). Čím je kritérium důležitější, tím je bodové ohodnocení vyšší. Uživatel nemusí volit pouze celá čísla z dané stupnice a může přiřadit stejnou hodnotu i více kritériím. Bodovací metoda sice vyžaduje od uživatele kvantitativní ohodnocení kritérií, ale umožňuje diferencovanější vyjádření subjektivních preferencí než metoda pořadí. Výpočet vah se provádí podle vztahu (34) jako u metody pořadí.

4.4.3 Metoda párového srovnání kritérií - Fullerova metoda

Zde se používá pro odhad vah pouze informace, které ze dvou kritérií je při párovém srovnání důležitější. Uživatel postupně srovnává každá dvě kritéria mezi sebou, takže počet srovnání je

$$N = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \tag{36}$$

Srovnání se mohou provádět v tzv. **Fullerově trojúhelníku**. Kritéria se pevně očíslují pořadovými čísly $1, 2, \ldots, k$. Uživateli se předloží trojúhelníkové schéma, jehož dvojřádky tvoří dvojice pořadových čísel, uspořádaných tak, že se každá dvojice kritérií vyskytne právě jedenkrát. Uživatel je požádán, aby zakroužkováním označil u každé dvojice to kritérium, které považuje za duležitější. Počet zakroužkování i-tého kritéria označíme n_i. Váha i-tého kritéria se pak vypočte dle následujícího vzorce

$$v_i = \frac{n_i}{N}; \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{37}$$

Fullerův trojúhelník má následující schéma:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\
2 & 3 & 4 & . & . & k \\
\hline
 & 2 & 2 & . & . & 2 \\
 & 3 & 4 & . & . & k \\
\cline{2-6}
 & & . & . & . & k \\
\cline{3-6}
 & & & & k\text{-}2 & k\text{-}2 \\
 & & & & k\text{-}1 & k \\
\cline{5-6}
 & & & & & k\text{-}1 \\
 & & & & & k
\end{array}$$

Výhodou této metody je jednoduchost vyžadované informace od uživatele. Po úpravách je možno připustit i situace, že některá kritéria jsou stejně důležitá, nebo nesrovnatelná. V případě, že chceme vyloučit nulové váhy, zvyšuje s v případě potřeby každý počet zakroužkovaných čísel o jedničku a musí se odpovídajícím způsobem zvýšit i hodnota jmenovatele ve vzorci (37).

PŘÍKLAD: Dejme tomu, že si chceme z několika variant zvolit své budoucí zaměstnání a rozhodli jsme se posuzovat nabídky podle následujících kritérií:

kritérium f_1	-	vzdálenost zaměstnání od místa bydliště
kritérium f_2	-	výše platu
kritérium f_3	-	možnost profesního růstu
kritérium f_4	-	prestiž firmy

Pokud budeme řešit daný problém některou z metod multikriteriální analýzy, která bude vyžadovat znalost vah kritérií, můžeme použít metodu Fullerova trojúhelníku, jak je uvedeno níže:

$$\begin{array}{ccc}
f_1 & f_1 & f_1 \\
f_2 & f_3 & f_4 \\
\hline
 & f_2 & f_2 \\
 & f_3 & f_4 \\
\cline{2-3}
 & & f_3 \\
 & & f_4
\end{array}$$

Kritérium f_1 bylo preferováno (zakroužkováno) jednou ($n_1 = 1$ bod) , kritérium f_2 dvakrát jako jednoznačně důležitější (2 body) a jednou jako stejeně důležité s kritériem f_3 (0,5 bodu), takže $n_2 = 2,5$ bodu. Kritérium f_3 má ze stejného důvodu také 0,5 bodu a navíc ještě 1 bod za srovnání s kritériem f_1, proto $n_3 = 1,5$ bodu. Kritérium f_4 má $n_4 = 1$ bod. Dle vztahu (37) pak určíme váhy jednotlivých kritérií, tedy důležitost jakou jim přisuzujeme:

Kritérium	v_i
kritérium f_1 – vzdálenost zaměstnání od místa bydliště	0,166
kritérium f_2 – výše platu	0,416
kritérium f_3 – možnost profesního růstu	0,250
kritérium f_4 – prestiž firmy	0,166
Suma vah všech kritérií	**1,000**

Tabulka 1: Váhy kritérií vypočtené metodou Fullerova trojúhelníku

4.4.4 Metoda kvantitativního párového srovnání kritérií

Při vytváření matice párových srovnání $S = (s_{ij})$, kdy $i, j = 1, 2, \ldots, k$, se často používá stupnice $1, 2, \ldots, 9$ a reciproké hodnoty. Prvky matice s_{ij} jsou interpretovány jako odhady podílu vah i-tého a j-tého kritéria

$$s_{ij} \approx \frac{v_i}{v_j}; \quad i,j = 1,2,\ldots,k \tag{38}$$

Této matici se říká Saatyho matice.

Důvody pro zvolený rozsah stupnice jsou okolnosti, že všechny prvky by měly být stejného řádu; existuje i odpovídající vhodná verbální stupnice:

1 – rovnocenná kritéria i a j

3 – slabě preferované kritérium i před j

5 – silně preferované kritérium i před j

7 – velmi silně preferované kritérium i před j

9 – absolutně preferované kritérium i před j

Hodnoty 2, 4, 6, 8 vyjadřují mezistupně.

Předpokládejme, že máme definovány prvky (kritéria) $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Vzájemným porovnáním těchto prvků sestavil uživatel matici párových porovnání $S = (s_{ij})$, při $i,j = 1,2,\ldots,k$. Otázkou však nyní zůstává, jakým způsobem budou z matice párových porovnání odvozeny váhy (preferenční indexy) těchto prvků (kritérií). Vektor jejich hodnot označíme $v = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$.

Matice párových porovnání S obsahuje kvantifikované informace od uživatele o vztahu jednotlivých dvojic prvků. Prvek s_{ij} této matice můžeme interpretovat v podstatě jako poměr důležitosti prvků f_i a f_j. Z tohoto určení tedy vyplývají vlastnosti prvků této matice:

- prvky na diagonále $s_{ii} = 1$ při $i = 1,2,\ldots,k$
- matice S je reciproční matice – platí tedy: $s_{ij} = 1/s_{ji}$

Matici S můžeme tedy zapsat následovně

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \ldots & f_k \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & s_{12} & \ldots & s_{1k} \\ 1/s_{12} & 1 & \ldots & s_{2k} \\ \vdots & & & \\ 1/s_{1k} & 1/s_{2k} & \ldots & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{39}$$

4.4.5 Určení vah kritérií z geometrického průměru řádků

Jednoduchý a nenáročný způsob určení vah krítérií ze zadané matice S spočívá ve výpočtu geometrického průměru každého řádku této matice

$$g_i = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^{k} s_{ij}}; \quad i,j = 1,2,\ldots,k \tag{40}$$

a následné normalizace určených vah, tak aby byla splněna podmínka

$$\sum_{i=1}^{k} v_i = 1; \quad v_i \geq 0 \tag{41}$$

Normalizovat můžeme například jednoduchým vztahem

$$v_i = \frac{g_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} g_i}; \quad i,j = 1,2,\ldots,k \tag{42}$$

PŘÍKLAD: Mějme zadánu matici párových provnání

$$
\begin{array}{c}
\\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 4 & 6 & 7 \\
1/4 & 1 & 3 & 4 \\
1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\
1/7 & 1/4 & 1/2 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\tag{43}
$$

Vypočteme geometrické průměry všech řádků:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \sqrt[4]{1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} = \sqrt[4]{168} = 3,6 \\
g_2 &= \sqrt[4]{1/4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4} = \sqrt[4]{3} = 1,31 \\
g_3 &= \sqrt[4]{1/6 \cdot 1/3 \cdot 1 \cdot 2} = \sqrt[4]{0,111} = 0,5773 \\
g_4 &= \sqrt[4]{1/7 \cdot 1/4 \cdot 1/2 \cdot 1} = \sqrt[4]{0,01785} = 0,3655
\end{aligned}
$$

Po normalizaci na základě vztahu (42) získáme

Kritérium	v_i
kritérium f_1	0,615
kritérium f_2	0,224
kritérium f_3	0,099
kritérium f_3	0,062
Suma vah všech kritérií	**1,000**

Tabulka 2: Váhy kritérií - geometrický průměr řádků

4.4.6 Podrobný popis Saatyho metody určování vah kritérií

Saatyho postup k odvození prvků vektoru v (váhy, preferenční indexy prvků) spočívá ve výpočtu vlastního vektoru, který přísluší největšímu vlastnímu číslu matice S.

Předpokládejme nejprve situaci, že se uživateli podaří zadat matici S ideálním způsobem tak, že pro všechny trojice indexů $i,\ j,\ q$ této matice bude platit

$$
s_{ij} \cdot s_{jq} = s_{iq} \tag{44}
$$

Pokud matice S bude splňovat podmínku (44), potom budeme říkat, že je to plně konzistentní matice. Vzhledem k této podmínce a vzhledem k tomu, že hledané hodnoty v_i pro $i = 1, 2, \ldots, k$, představují kvantifikaci důležitosti prvků hierarchie f_i a prvky matice párových porovnání jsou poměry těchto důležitostí, je možné psát

$$
s_{ji} = \frac{v_j}{v_i}; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k \tag{45}
$$

a tedy

$$
s_{ij} \cdot s_{ji} = 1; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k \tag{46}
$$

Sloučením (45) a (46) dostáváme

$$
s_{ij} \cdot \frac{v_j}{v_i} = 1; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k \tag{47}
$$

a odtud

$$\sum_{j=1}^{k} s_{ij} \cdot \frac{v_j}{v_i} = k; \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{48}$$

resp.

$$\sum_{j=1}^{k} s_{ij} \cdot v_j = k \cdot v_i; \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{49}$$

Vztah (49) odpovídá maticovému zápisu

$$S \cdot v = k \cdot v \tag{50}$$

Z předcházejícího vztahu vyplývá, že vektor v je vlastním vektorem matice S příslušející vlastnímu číslu k. Pro jeho kvantifikaci lze potom použít některou z metod pro výpočet vlastního vektoru matice.

Uvažujme nyní reálnou situaci, že matice S zadaná uživatelem není plně konzistentní. Vzhledem ke způsobu zadávání prvků matice S (může být verbální i numerický), nelze ani předpokládat, že by se uživateli podařilo zadat plně konzistentní matici. V postupu pro výpočet vektoru v vychází Saaty z následujících předpokladů, vyplývajících z maticové teorie.

Pro pozitivní reciproční matici $S_{(k \times k)}$ existuje k-vektorů w^i a skalárních hodnot l_i, při $i = 1, 2, \ldots, k$, pro které platí

$$S \cdot w^i = l_i \cdot w^i \tag{51}$$

$$\sum_{i=1}^{k} l_i = k \tag{52}$$

(w^i a l_i jsou vlastní vektory resp. vlastní čísla matice S).

Pro plně konzistentní matici S platí, že jedním z vlastních čísel je řád matice k a ostatní vlastní čísla jsou rovna nule. Řád matice S je tedy největším vlastním číslem této matice.

Nepatrné změny v koeficientech matice S vedou k nepatrným změnám v hodnotách vlastních čísel a vektorů této matice.

Pokud tedy matice párových porovnání není plně konzistentní, potom lze za předpokladu, že ”míra nekonzistence” není příliš velká, konstatovat, že pro největší vlastní číslo této matice platí $l_{max} > k$, a že ostatní vlastní čísla jsou blízká nule (některá z nich jsou komplexní čísla). Saaty potom navrhuje řešit pro odvození intenzit preferencí soustavu

$$S \cdot v = l_{max} \cdot v \tag{53}$$

$$\sum_{i=1}^{k} v_i = \alpha \tag{54}$$

kde α je váha i-tého kritéria (prvku).

Jedním z předpokladů použití výše uvedeného postupu je dostatečná konzistence matice párových porovnání. Měření konzistence vychází z toho, že čím větší jsou nesrovnalosti v zadání matice párových porovnání, tím větší je rozdíl $l_{max} - k$. Tento rozdíl nelze samozřejmě uvažovat absolutně, ale pouze ve vztahu k řádu dané matice. Saaty definuje index konzistence

$$C.I. = (l_{max} - k)/(k - 1) \tag{55}$$

Pokud je hodnota tohoto indexu $C.I. < 0,1$, potom lze považovat matici párových porovnání za dostatečně konzistentní. Jiným způsobem ověření konzistence je tzv. poměr konzistence

$$C.R. = C.I./R.I. \tag{56}$$

k	3	4	5	6	7	8	10	12	15
R.I.	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,49	1,53	1,59

Tabulka 3: Hodnoty průměrného indexu R.I.

kde R.I. je průměrný index konzistence pro 500 náhodně generovaných recipročních matic při použití Saatyho škály 1-9. Přehled v tabulce (3) přináší hodnoty průměrného indexu R.I. pro různé řády matice S:

Za dostatečně konzistentní matici při hodnocení poměru konzistence je považována ta, pro kterou platí $C.R. < 0,1$.

Saatyho postup pro odvození vah kritérií z matice párových porovnání spočívá tedy v řešení soustavy rovnic (53–54), tzn. ve výpočtu vlastního vektoru matice S, který přísluší největšímu vlastnímu číslu této matice l_{max}. Pro tento výpočet existuje několik numerických metod, jedna z nich je založena na platnosti vztahu

$$\lim_{r\to\infty} \frac{S^r \cdot e}{e^T \cdot S^r \cdot e} = c \cdot v \tag{57}$$

kde $S_{k\times k}$ je pozitivní reciproční matice, v je její vlastní vektor příslušející největšímu vlastnímu číslu, c je konstanta a $e^T = (1, 1, \ldots, 1)$. Vztah (57) říká, že vektor tvořený součtem prvků řádků r-té mocniny matice S dělený součtem všech prvků této matice se blíží pro dostatečně velké r vlastnímu vektoru matice S příslušející největšímu vlastnímu číslu. Postup výpočtu je tedy poměrně jednoduchý. V jednotlivých iteracích se propočte vztah $(S^r \cdot e)/(e^T \cdot S^r \cdot e)$ pro $r = 1, 2, 4, 8, \ldots$ a sleduje se, jak se vypočtené vektory liší ve dvou po sobě jdoucích iteracích. Zkušenosti ukazují, že dostatečnou přesnost dosáhneme již pro $r = 16$.

PŘÍKLAD: Při určování vah kritérií touto metodou sestavíme nejprve tzv. Saatyho matici tak, že porovnáme vždy dva prvky (dvě kritéria) mezi sebou a ohodnotíme poměr jejich důležitostí (významů) zlomkem, kde čitatel a jmenovatel jsou celá čísla v rozsahu 1-9. Získáme například takovouto matici:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{58}$$

Při jejím vyplňování stačí porovnávat a dosazovat pouze prvky nad hlavní diagonálou, která je pochopitelně tvořena samými jedničkami, což vyplývá z vlastností Saatyho reciproční matice.

Pro výpočet váhového vektoru použijeme vztah (57) následujícím způsobem

$$\lim_{r\to\infty} \frac{S^r \cdot e}{e^T \cdot S^r \cdot e} = c \cdot v \tag{59}$$

Jako dostatečný iterační krok si zvolíme $r = 16$, tedy šestnáctou mocninu Saatyho matice a výpočet si rozdělíme do jednotlivých kroků. Nejprve vypočteme čitatele daného zlomku:

$$S^r \cdot e = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}^{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,201 \cdot 10^{10} \\ 1,161 \cdot 10^{10} \\ 5,0474 \cdot 10^{9} \\ 3,2243 \cdot 10^{9} \end{bmatrix} \tag{60}$$

a nyní jmenovatele, což je skalární hodnota, jíž podělíme vektor vypočtený výše a získáme tak výsledný vektor vah kritérií:

$$e^T \cdot S^r \cdot e = [1\ 1\ 1\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}^{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5,191 \cdot 10^{10} \tag{61}$$

Kritérium	v_i
kritérium f_1	0,617
kritérium f_2	0,224
kritérium f_3	0,097
kritérium f_3	0,062
Suma vah všech kritérií	**1,000**

Tabulka 4: Váhy kritérií vypočtené Saatyho metodou

Získané hodnoty a pracnost výpočtu můžete srovnat s příkladem v kapitole 4.4.5, kde byla tatáž vstupní matice počítána pomocí geometrického průměru řádků.

Literatura

[1] Gurecký J., Optimalizace řízení sítí vn dálkově ovládanými úsečníky, Ostrava 1998, Dizertační práce

[2] Krejčí P., Řešení spolehlivosti dodávky elektrické energie v oblasti s dálkově ovládanými prvky v sítích vysokého napětí, Ostrava 2001, Dizertační práce

[3] Pavlovský B., Elektrické sítě v městech a sídlištích, SNTL Praha, 1975

[4] Jaroš Fr., Pravděpodobnost a statistika, VŠCHT Praha, 1994

[5] Fiala P., Jablonský J., Maňas M., Vícekriteriální rozhodování, VŠE Praha, 1994

[6] Černý M., Glückaufová D., Vícekriteriální vyhodnocování v praxi, Praha 1982

[7] Píšek M., Hanuš F., Rozhodovací analýza, Praha 1994

[8] Keeney R.L., Raiffa H., Decision with Multiple Objectives, John Wiley & Sons, New York, 1976 (Šachnov I.F., Prinjatie rešenij pri mnogich kriterijach, Radio i svjaz, Moskva, 1981)

[9] Fishburn P.C., Utility theory for decision making, John Wiley & Sons, 1970

[10] Clemen R.T., Making hard decisions: An introduction to decision analysis, Boston:PWS-Kent, 1991

[11] Joshi B. et al., Decentralized Energy Planning Model for Optimum Resource Allocation with a Case Study of the Domestic Sector or Rurals in Nepal, in International Journal of Energy Research, 15, (P.71-78), 1991

[12] Keeney R.L., Value focused thinking: A path to creative decisionmaking, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1992

[13] Saaty Th. L., Priority Setting in Complex Problems, in Hansen, P.(Hrg.), Essays and Surveys on Multiple Criteria Decision Making. Proceedings of the Fifth International Conference on Multiple Criteria Decision Making, Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag.(P.326-336), 1983

[14] Saaty Th. L., Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process in Management Science, 32, No. 7, (P. 841-847), 1986

[15] Saaty Th. L., An Exposition of AHP in Reply to The Paper ”Remarks on the Analytic Hierarchy Process”, in Management Science, 36. No. 3, (P. 259-268), 1990

[16] Saaty Th. L., Vargas L. G., Wendell R. E., Assessing Attribute Weights by Rations, in Omega, The International Journal of Management Science, 2, No. 1, (P. 9-13), 1983

[17] Rinza P., Schmitz H., Nutzwert-Kosten-Analyse - Eine Entscheidungshilfe, VDI-Verlag GmbH, 1977

[18] Hradílek Z., Gurecký J., Zvýšení spolehlivosti dodávky elektrické energie využitím dálkově řízených úsekových odpojovačů, Sborník příspěvků 3. mezinárodní konference ”Nové směry automatizace energetických procesů ’98”, Zlín, 1998

[19] Hradílek Z., Gurecký J., Rusek S., Optimisation in design of automatic control of disconnecting switches in outdoor voltage networks, IV Sympozjum MMWEE ’98 ”Metody matematyczne w elektroenergetyce”, Zakopane, 1998

[20] Hradílek Z., Gurecký J., Applications of methods of multicriterion analysis in the optimization of introduction the remote-controlled disconnecting switches in outdoor high-voltage networks. Sympozjum PPEE ’99 ”Podstawowe problemy elktroniki i elektromechaniki”, Ustro, 1999

[21] Angot A., Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry, SNTL, Praha, 1971

[22] Říha J., Hodnocení vlivu investic na životní prostředí - vícekriteriální analýza a EIA, Academia, Praha, 1995

[23] Píšková V., Vícekriteriální hodnocení I. - příručka pro uživatele, Výzkumný ústav výstavby a architektury v knižnici ministerstva hospodářství ČR, Praha, 1993

[24] Grygarová L., Základy vícekriteriálního programování, skripta UK, Karolinum, Praha 1996

[25] Halvorson M., MS Visual Basic 6.0, Computer Press, 1999

[26] Pokorný J., Kvoch M., Programování ve Visual Basicu 5.0, Kopp, 1998

[27] Pokorný J., Řešené úlohy z VB - 1. díl, Kopp, 1999

[28] Pokorný J., Řešené úlohy z VB - 2. díl, Kopp, 1999

[29] Pokorný J., Řešené úlohy z VB - 3. díl, Kopp, 1999

[30] Pokorný J., Řešené úlohy z VB - 4. díl, Kopp, 1999

[31] Pokorný J., Řešené úlohy z VB - 5. díl, Kopp, 2000

[32] McFedries P., VBA for Microsoft Office 2000, UNIS Publishing, 2000

[33] Tricks of the Visual Basic 4 Gurus, Sams Publishing, 1996

[34] Craig J.C., Microsoft Visual Basic 4.0, Microsoft Press, 1996

[35] Simon J.R., Gouker M., Barnes B.C., Win32 API, UNIS Publishing, 1997

[36] Kocich P., Gürtler M., 1001 tipů a triků pro Visual Basic, Computer Press, 2000

[37] Rybička J., LaTeX pro začátečníky, KONVOJ, Brno, 1999

[38] Goossens N., Mittelbach F., Samarin A., The LaTeX Companion, Addison-Wesley, 1997

[39] Goossens N., Mittelbach F., Samarin A., The LaTeX Graphics Companion, Addison-Wesley, 1998